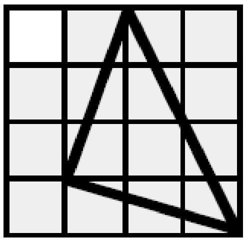
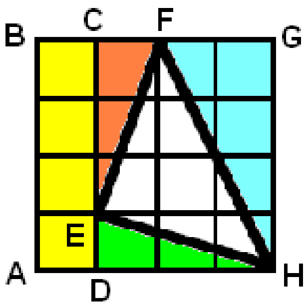
Ciclo 12/14

Ciclo 12/14. Problema nº1.- TRIÁNGULO CUADRICULADO

Tomando como unidad de superficie el cuadrado blanco, calcula el área del triángulo.



SOLUCIÓN:
Una forma de resolverlo es por diferencia entre el área del cuadrado y el área del recinto exterior al triángulo.



Área del rectángulo ABCD = 4 u^2

Área del triángulo CEF = $\frac{3}{2}$ u^2

Área del triángulo EDH = $\frac{3}{2}$ u^2

Área del triángulo FGH = 4 u^2

Área del triángulo EFH = $16-\left(4+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+4\right)=$ **5 u^2**

Otra forma de resolverlo:

El triángulo FEH es rectángulo en E, para hallar el área hay que hallar lo que miden los catetos usando el teorema de Pitágoras.

$FE=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ u

$EH=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ u

Área del triángulo EFH $=\dfrac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}{2}=$ **5 u^2**

Ciclo 12/14. Problema nº2.- EL QUE COJA LA ÚLTIMA GANA

Tenemos 15 monedas de un euro recién acuñadas sobre la mesa, y cada uno de los dos jugadores, en su turno, retira 1, 2 o 3 monedas, según desee. El jugador que retire la última moneda gana. Indica de qué forma jugarías para ganar siempre.

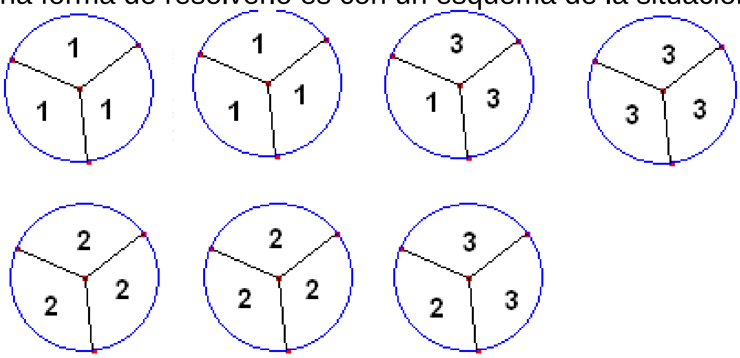
SOLUCIÓN:
El jugador que inicia la partida tiene la posibilidad de ganar siempre. Para ello debe retirar 3 monedas en su primer turno, y en los siguientes tiene que retirar 3, 2 ó 1, según que el adversario haya retirado respectivamente 1, 2 ó 3 en la jugada inmediatamente anterior. Así conseguirá que, después de sus sucesivas extracciones, en la mesa vayan quedando 12, 8, 4, 0, sin que el otro jugador pueda evitar su triunfo.
Esto puede representarse en el siguiente esquema.

Hay	quito	dejo	quita el otro	deja	quito	dejo	quita el otro	deja	quito	dejo	quita el otro	deja	quito	dejo
15	**3**	12	1	11	**3**	8	1	7	**3**	4	1	3	**3**	0
			2	10	**2**		2	6	**2**		2	2	**2**	
			3	9	**1**		3	5	**1**		3	1	**1**	

Ciclo 12/14. Problema nº3.- COMPARTIENDO LOS PANECILLOS

Pepe, Pedro y Paco van de excursión. A la hora de comer deciden juntar los panecillos, que se reparten a partes iguales. Pepe aporta 4 panecillos y Pedro 3.
Yo no tengo pan, dice Paco, *así que pondré dinero, tomad 7 euros.*
¿Cómo deben repartirse Pepe y Pedro los 7 euros?

SOLUCIÓN:
Una forma de resolverlo es con un esquema de la situación.



En la primera fila están los panes que aporta Pepe y en la segunda los que aporta Pedro. Lo que come Pepe lo marcamos con un 1, lo de Pedro con un 2 y lo de Paco con un 3.
A cada uno le corresponde 7/3 de panecillos. Pepe pierde 5/3 y Pedro 2/3 luego del dinero se deben hacer 7 partes, **Pepe se debe llevar 5 y Pedro 2**.

VIII OLIMPIADA PROVINCIAL CUENCA 9 de mayo de 2009

Ciclo 14/16

Ciclo 14/16. Problema nº1.- UNA CUENTA UN POCO LARGA

Calcula:
1+3–5–7+9+11–13–15+17+19–…+22315

SOLUCIÓN:
Llevan signo + los números cuya posición es de la forma 4n–3 y 4n–2.
Los de posición 4n–3 se pueden emparejar con un término negativo inmediatamente anterior de modo que sumados con éste dan 2.
Los de lugar 4n–2 se emparejan con el siguiente y suman –2.
El número 22.315 ocupa el lugar 11.158, lugar par de la forma 4n–2, por eso lleva signo +.
El resultado de la operación es 1 + 22.315 = **22.316**

Otra forma:
Cada 4 términos de la suma suman -8. (1+3–5–7= -8; 9+11–13–15 = -8….)
La sucesión 1, 3, 5, 7, … de impares tiene por término general $a_n = 2n - 1$
$22315 = 2n - 1 \Rightarrow n = 11158$. El número 22315 ocupa el lugar 11158º.
Si hacemos la división 11158:4 nos da de cociente 2789 y de resto 2.
Por tanto, en la suma S=1+3–5–7+9+11–13–15+17+19–…+22315 hay 2789 grupos de 4 sumandos cuyo resultado es -8 y hay que añadir los sumandos 22313 y 22315.
S = 2789·(-8)+ 22313+22315=**22316**

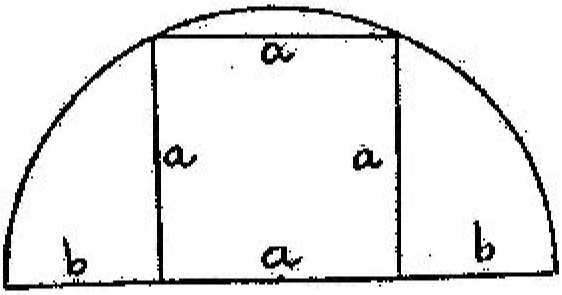
Ciclo 14/16. Problema nº2.- LAS AVELLANAS

Una madre de familia decide distribuir entre sus hijos cierto número de avellanas. Al primero de los hijos le da 5 avellanas más un quinto del resto; al segundo, 10 avellanas más un quinto del resto; al tercero, 15 más un quinto del resto, y así sucesivamente. ¿Cuál era el número de hijos y cuántas avellanas tocaron a cada uno, teniendo en cuenta que todos recibieron la misma cantidad?

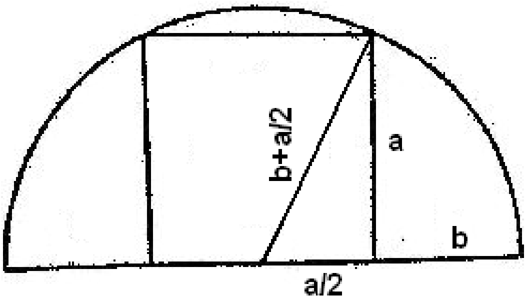
SOLUCIÓN:
Si llamo a al número de avellanas totales, el primer hijo recibe $5 + \frac{a-5}{5} = \frac{20+a}{5}$ avellanas, quedan $a - \frac{20+a}{5} = \frac{4a-20}{5}$ avellanas.
El segundo hijo recibe $10 + \frac{1}{5}\left(\frac{4a-20}{5} - 10\right) = \frac{4a+180}{25}$ avellanas.
Como todos los hijos reciben lo mismo: $\frac{4a-20}{5} = \frac{4a+180}{25}$, que resolviéndolo da $a = 80$, es decir, había 80 avellanas.
Cada hijo recibe $\frac{20+80}{5} =$ **20 avellanas**; y hay 80:20 = **4 hijos**

Ciclo 14/16. Problema nº3.- UN CUADRADO EN UN SEMICÍRCULO

Calcula la razón (o cociente) entre a y b



SOLUCIÓN:
Aplicando el teorema de Pitágoras:



$$\left(b+\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow b^2 + ab = a^2$$

Dividiendo toda la expresión entre b^2:

$$\frac{b^2}{b^2}+\frac{ab}{b^2}=\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 1+\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$$, si llamo $x=\frac{a}{b}$, obtengo $1+x=x^2$, resolviéndola

$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$ la razón pedida es $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$ (el número aúreo)