



IX OLIMPIADA MATEMÁTICA
Educación Secundaria
cuenca

IES FERNANDO ZÓBEL

8-MAYO-2010

Ciclo 12/14

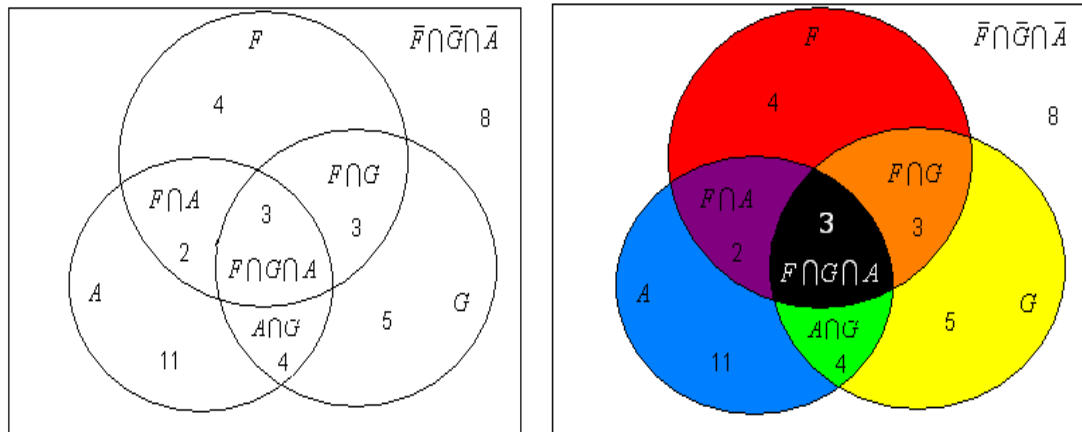
SOLUCIONES

Ciclo 12/14. Problema nº1.- LA FIESTA

Coincidiendo con el aniversario de los Beatles, Pablo decide dar una fiesta en su casa, a la que asisten 40 personas. Mientras escuchan "Yesterday", al mayordomo le encargan dar un recado urgente a uno de los invitados, pero no sabe a cual, sólo sabe que es alguien que ha venido en coche y que no fuma ni usa gafas. Si entre los asistentes comprueba que 12 son fumadores, 15 usan gafas, 20 han venido en coche, 6 fuman y usan gafas, 7 usan gafas y han venido andando, 5 fuman y han venido andando y tres fuman, usan gafas y han venido andando. ¿Cuántas personas tienen posibilidad de ser los receptores del mensaje del mayordomo?

SOLUCIÓN

Si llamamos F al conjunto de los fumadores, G al de las personas que usan gafas y A al conjunto de las personas que han ido a la fiesta andando, resolvemos el problema con el siguiente diagrama.



Por tanto **8** personas tienen posibilidad de ser las receptoras del mensaje

Ciclo 12/14. Problema n°2.- EQUIPAJES

Dos pasajeros de un avión llevan, entre los dos, 135 kg de equipaje. El primero paga 13,5 € por su exceso de equipaje y el segundo 27 € por el exceso en el suyo. Si el total del equipaje perteneciera a una sola persona pagaría 81 € por el exceso. ¿Cuántos kilos de equipaje son permitidos a cada persona sin tener que pagar nada adicional?

Nota: Por cada Kg de exceso se paga siempre la misma cantidad de dinero.

Solución:

Si solo viajara una persona debería pagar el exceso que llevan los dos viajeros (40,5 €) más lo que corresponda a la cantidad de kilos permitidos, ya que los viajeros llevan en total dos veces la cantidad permitida más sus excesos sumados. Como la persona debe pagar 81 € (el doble de 40,5) la cantidad permitida es igual al exceso que llevan entre los dos viajeros. Luego la persona lleva en total 3 veces la cantidad permitida siendo ésta, por tanto, de **45 kg**.

Ciclo 12/14. Problema n°3.- CRECIMIENTO

Las mellizas Ana y Sara fueron una vez igual de altas. Desde entonces, Sara ha crecido un 20 % mientras que Ana ha crecido la mitad que Sara. Si Sara tiene ahora 156 cm de altura, ¿cuántos cm mide Ana actualmente?

Solución:

Sara mide 156cm y sabemos que ha aumentado un 20% de la altura que tenía, por lo que antes medía $(156 \cdot 100) / 120 = 130\text{cm}$, ha aumentado $156 - 130 = 26\text{cm}$. Como Ana ha crecido la mitad de centímetros que Sara, Habrá crecido $26 / 2 = 13\text{cm}$, con lo que tenemos que ahora mide $130 + 13 = \mathbf{143\text{cm}}$.

SOLUCIONES

Ciclo 14/16. Problema n°1.- VACAS

Cuatro vacas blancas y tres vacas negras dan tanta leche en 5 días como tres vacas blancas y cinco negras en 4 días. ¿Qué clase de vaca es la más lechera, la blanca o la negra?



SOLUCIÓN

Si llamamos B a la cantidad de leche que da una vaca blanca y N a la cantidad que da una vaca negra. Tenemos la siguiente ecuación:

$$(4B + 3N) \cdot 5 = (3B + 5N) \cdot 4 \Rightarrow 20B + 15N = 12B + 20N \Rightarrow 8B = 5N \Rightarrow B = \frac{5N}{8}$$

Por lo que podemos afirmar que es más lechera la negra.

Ciclo 14/16. Problema n°2.- UNO DE NÚMEROS

Siendo x un número primo mayor que 3, demuestra que entonces el resto de la división de x^2 entre 12 es 1.

SOLUCIÓN

El enunciado del problema es equivalente a demostrar que $x^2 - 1$ es divisible entre 12, es decir demostrar que $x^2 - 1$ es divisible por 4 (luego por 2 dos veces) y por 3.

$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ Como el enunciado dice que x es número primo mayor que 3, es evidente que x es un número impar y por tanto que $x - 1$ es par y divisible por 2 y que $x + 1$ también es par y divisible por 2. Por tanto el número $x^2 - 1$ es divisible dos veces por 2, luego divisible por 4.

$(x-1)$, x , $(x+1)$ son tres números consecutivos, luego entre ellos habrá uno y sólo un múltiplo de 3. Como x es un número primo mayor que 3, x no puede ser divisible por 3, luego deberá serlo o bien $(x-1)$ o bien $(x+1)$ y en cualquier caso lo será $x^2 - 1$.

Ciclo 14/16. Problema n°3.- CILINDRO INSCRITO

Un cilindro recto, con diámetro de la base igual a la altura, está inscrito en un cono recto de diámetro de base 10cm y altura 12cm, de manera que coinciden los ejes del cilindro y del cono. ¿Cuál es el radio del cilindro?

Solución.

Por semejanza: $\frac{FQ}{QB} = \frac{12}{5}$

Llamando r al radio del cilindro:

$$\frac{2r}{5-r} = \frac{12}{5} \Rightarrow r = \frac{30}{11} = 2,727272 \dots \text{cm}$$

